www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 6

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

I

L'objet de cette partie est de résoudre l'équation des cordes vibrantes par la méthode de d'Alembert.

Soit $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit χ l'automorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par la relation

$$\chi(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

Soit f un élément de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Calculer les dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de $g = f \circ \chi$ en fonction des dérivées partielles de f.

2. Prouver que l'application $\theta : f \mapsto f \circ \chi$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

3. Soit $\mathscr{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ constitué des fonctions f satisfaisant sur $\mathbb{R}^2$ à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Déterminer l'image de $\mathscr{E}$ par l'automorphisme θ.

4. En déduire que $\mathscr{E}$ est l'ensemble des éléments de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ de la forme

$$f(x, y) = F(x - y) + G(x + y),$$

où F et G sont des fonctions numériques de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

5. Soit φ un élément de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un élément f de $\mathscr{E}$ et un seul satisfaisant, pour tout nombre réel x, aux conditions initiales suivantes :

$$f(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0. \tag{2}$$

Expliciter f en fonction de φ.

Tournez la page S.V.P.

II

On se propose maintenant d'étudier les solutions de (1) satisfaisant à la condition (2) par développement en série de Fourier. L'objet de cette partie est d'établir quelques résultats préliminaires concernant les séries de Fourier.

Soit a un nombre réel strictement positif. On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions numériques φ continues sur $[0, a]$ et telles que $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$. On munit l'espace vectoriel E du produit scalaire

$$(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \mid \psi) = \int_0^a \varphi(x)\,\psi(x)\,dx.$$

On note $\varphi \mapsto \| \varphi \|_2$ la norme euclidienne associée.

1. Pour tout entier naturel non nul n, on note s_n la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x$. Prouver que la famille (s_n) est orthonormale.

2. Soit φ un élément de E. Pour tout entier naturel non nul k, on pose $\alpha_k(\varphi) = (\varphi \mid s_k)$. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute suite $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ associe $\| \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k \|_2$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $(\alpha_1(\varphi), \alpha_2(\varphi), ..., \alpha_n(\varphi))$.

3. Soit $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ la suite des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\varphi)\, s_k.$$

Établir que $\| \varphi - \varphi_n \|_2$ tend vers 0. (On pourra prolonger φ en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, impaire et 2 a-périodique.)

4. Prouver que la série de terme général $(\alpha_n^2(\varphi))$ converge, et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2(\varphi) = \| \varphi \|_2^2.$$

III

Dans cette partie, on désigne par φ un élément de E de classe C^2 sur $[0, a]$. On se propose d'étudier l'existence et l'unicité d'un élément f de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ solution de l'équation (1), satisfaisant aux conditions aux limites (3) et, pour tout élément x de $[0, a]$, à la condition initiale (2).

1. Déterminer les nombres réels λ tels que l'équation différentielle $z'' + \lambda z = 0$ admette une solution non nulle sur $\mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions aux limites $z(0) = 0$ et $z(a) = 0$. Expliciter l'ensemble des solutions correspondant à chacune de ces valeurs de λ.

T.S.V.P

2. Déterminer l'ensemble des solutions f de l'équation (1) sur $\mathbb{R}^2$ satisfaisant pour tout nombre réel y aux conditions aux limites

(3) $$f(0, y) = f(a, y) = 0$$

et de la forme $f(x, y) = F(x)\,G(y)$.

3. On introduit la suite des fonctions $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\varphi) s_k$. Montrer qu'il existe un élément f_n de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et une seule combinaison linéaire de solutions déterminées dans la question 2, solution de (1), satisfaisant aux condition aux limites (3) et, pour tout nombre réel x à la condition initiale

$$f_n(x, 0) = \varphi_n(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f_n}{\partial y}(x, 0) = 0\,.$$

Comparer au résultat de la question I.5.

4. *a.* Prouver que la suite $(\alpha_n(\varphi))$ est dominée par $\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire que la suite (φ_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue φ^*.

b. À l'aide de la question II.3., prouver que, pour tout élément x de $[0, a]$, $\varphi^*(x) = \varphi(x)$. La fonction φ^* appartient-elle à $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$?

c. Prouver que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^2$ vers une fonction continue f que l'on déterminera en fonction de φ^*. Prouver que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et qu'elle satisfait aux conditions (2) et (3). Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur φ pour que f soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'alors f est une solution de (1).

5. Soit g une solution de (1) sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout nombre réel y, on pose

$$I(y) = \frac{1}{2}\int_0^a \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right] dx\,.$$

Montrer que I est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$I'(y) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{\partial g}{\partial y}\right]_{x=0}^{x=a}.$$

Prouver que si g satisfait à la condition aux limites (3), I est constante. En déduire l'unicité de f.

IV

Lorsque φ ne satisfait pas aux conditions de la partie III, on est amené à généraliser la notion de solution de l'équation (1). Plus précisément, on dit qu'une fonction f continue sur $\mathbb{R}^2$ est solution de (1) au sens faible si elle est limite uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^2$ d'une suite (f_n) de fonctions de classe C^2 solutions de (1).

On désigne par φ un élément de E de classe C^1 par morceaux sur $[0, a]$.

1. Calculer $\alpha_n(\varphi)$ en fonction de $\alpha_n(\varphi')$. En utilisant le résultat de la question II.4., prouver que la série de terme général $(\alpha_n(\varphi))$ est absolument convergente.

2. On définit φ_n et f_n comme dans la question III.3. Prouver que (φ_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue φ^*, et que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^2$ vers une fonction continue f. Prouver que f satisfait aux conditions (2) et (3), et que c'est une solution de (1) sur $\mathbb{R}^2$ au sens faible.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail